Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas VI (MA-2113)
2^{do} Examen Parcial (35 %)
Verano 2015

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1. (7 pts.) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por:

$$f(z) = \operatorname{sen}(x^2 - y^2)\cosh(2xy) + i\cos(x^2 - y^2)\operatorname{senh}(2xy)$$

Determinar si f es analítica en algún subconfunto de $\mathbb{C}$. En caso afirmativo, expresar f como una función elemental que depende solo de z.

2. (10 pts.) Si z, ω son dos complejos que satisfacen el sitema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2e^z + 3\operatorname{sen}(\omega) = 5i \\ 3e^z - 2\operatorname{sen}(\omega) = i \end{cases}$$

hallar todas las soluciones de dicho sitema como un par ordenado (z, ω). (Observación: ¡ambas coordenadas complejas tienen infinitas soluciones!)

3. (8 pts.) Sea $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ la raíz cúbica primitiva de la unidad.
   (a) Demostrar que la factorización clásica en variable real $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ se convierte en $a^3 - b^3 = (a-b)(a-b\omega)(a-b\omega^2)$ para $a, b \in \mathbb{C}$ (Sugerencia: completar cuadrados con el polinomio cuadrático y reconocer $b\omega$ y $b\omega^2$ en esta factorización)
   (b) Usar la factorización anterior para resolver el $\displaystyle\lim_{x \to e^{\frac{2\pi i}{3}}} \frac{z^3 - 1}{z - e^{\frac{2\pi i}{3}}}$

4. (10 pts.) Sea Ω la banda semi-infinita definida por $\Omega\{x + iy \,|\, |x| \leq \frac{\pi}{2}, y \geq 0\}$, y sea $f(z) = \cos z$. Estudiar el mapeo de Ω por medio de f, estudiando cómo son las curvas $f(\gamma_1)$ y $f(\gamma_2)$, si γ_1 y γ_2 son segmentos de rectas horizontales y verticales, respectivamente, sobre Ω

Pregunta 1 (7 puntos) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = sen(x^2 - y^2)cosh(2xy) + icos(x^2 - y^2)senh(2xy)$$

Determinar si f es analítica en algún subconjunto de $\mathbb{C}$. En caso afirmativo expresar f como una función elemental que dependa de solo de z.

<u>**Solución**</u>

(a) Para saber si f es analítica, debemos verificar que se cumplan las condiciones de Cauchy-Riemann. Es decir,

$$u_x = v_y$$

$$u_y = -v_x$$

Donde, para $f(z)$,

$$u(x, y) = sen(x^2 - y^2)cosh(2xy)$$

$$v(x, y) = cos(x^2 - y^2)senh(2xy)$$

Procedamos entonces a hallar las derivadas parciales de u y de v con respecto de x y de y

$$u_x = 2xcos(x^2 - y^2)cosh(2xy) + 2ysen(x^2 - y^2)senh(2xy)$$

$$v_y = 2ysen(x^2 - y^2)senh(2xy) + 2xcos(x^2 - y^2)cosh(2xy)$$

$$\boxed{u_x = v_y}$$

$$u_y = -2ycos(x^2 - y^2)cosh(2xy) + 2xsen(x^2 - y^2)senh(2xy)$$

$$v_x = -2xsen(x^2 - y^2)senh(2xy) + 2ycos(x^2 - y^2)cosh(2xy)$$

$$\boxed{u_y = -v_x}$$

Como se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann para todo $(x, y) \in \mathbb{C}$ y, además, $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son funciones continuas con primeras derivadas parciales continuas. Podemos concluir que f es analítica en todo $\mathbb{C}$.

(b) Para hallar una expresión de f que dependa solo de la variable z tenemos que hacer manipulaciones sobre $f(x, y)$ hasta que podamos identificar a la variable $z = x + yi$. En este caso,

Sabemos que,

$$cosh(z) = cos(iz)$$

$$isenh(z) = sen(iz)$$

Así,

$$cosh(2xy) = cos(i2xy)$$

$$isenh(2xy) = sen(i2xy)$$

Por lo tanto,

$$f(z) = sen(x^2 - y^2)cosh(2xy) + icos(x^2 - y^2)senh(2xy) = sen(x^2 - y^2)cos(i2xy) + cos(x^2 - y^2)sen(i2xy)$$

$$= sen(\alpha)cos(\beta) + cos(\alpha)sen(\beta) = sen(\alpha + \beta) = sen(x^2 - y^2 + i2xy) = sen((x + iy)^2) =$$

$$\boxed{f(z) = sen(z^2)}$$

Pregunta 2 (10 puntos) Sean z, w dos complejos que satisfacen

$$\begin{cases} 2e^z + 3senw = 5i \\ 3e^z - 2senw = i \end{cases}$$

Hallar todas las soluciones de dicho sistema como un par ordenado (z, w) (Observación: ambas coordenadas complejas tienen infinitas soluciones).

<u>**Solución**</u>

(Hallando z) Resolvamos el sistema de ecuaciones por reducción

$$\begin{cases} 2 \cdot (2e^z + 3senw = 5i) \\ 3 \cdot (3e^z - 2senw = i) \end{cases} = \begin{cases} 4e^z + 6senw = 10i \\ 9e^z - 6senw = 3i \end{cases}$$

Luego, sumando ambas ecuaciones se tiene que $13e^z = 13i$
De manera que nos queda la siguiente ecuación compleja que debemos resolver

$$e^z = i$$

Aplicando logaritmo de ambos lados nos queda que

$$z = Ln(r) := ln|r| + i(\theta_r + 2k\pi)$$

Donde $r = i$ y $k \in \mathbb{Z}$

Nota: $Ln(r)$ en mayúscula denota al logaritmo como función multivaluada. Mientras que $ln(r)$ en minúscula denota al logaritmo real.

Luego,

$$z = ln|i| + i(tan^{-1}(\frac{1}{0}) + 2k\pi) = ln(1) + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \rightarrow \boxed{z = i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}$$

(Hallando w) De forma análoga, buscamos ahora eliminar z de nuestras ecuaciones para hallar w

$$\begin{cases} 3 \cdot (2e^z + 3senw = 5i) \\ -2 \cdot (3e^z - 2senw = i) \end{cases} = \begin{cases} 6e^z + 9senw = 15i \\ -6e^z + 4senw = -2i \end{cases}$$

Luego, sumando ambas ecuaciones se tiene que $13senw = 13i$
De manera que nos queda la siguiente ecuación compleja que debemos resolver

$$senw = i$$

Manipulemos un poco la expresión,

$$senw = sen(a + bi) = sen(a)cos(bi) + sen(bi)cos(a) = sen(a)cosh(b) + icos(a)senh(b) = i$$

Luego, sabemos para que dos números complejos sean iguales deben coincidir tanto su parte real como su parte imaginaria.
Es decir,

$$\begin{cases} sen(a)cosh(b) = 0 \\ cos(a)senh(b) = 1 \end{cases}$$

Partiendo de la primera ecuación, $sen(a)cosh(b) = 0$ si y solo sí, $\boxed{sen(a) = 0}$ ó $\boxed{cosh(b) = 0}$
Pero, la función $cosh(x)$ NUNCA se anula. Por lo tanto descartamos esa posibilidad.

Nota: Es conveniente conocer las gráficas de $senh(x)$ y $cosh(x)$ para resolver ejercicios que involucran funciones trigonométricas.

Así que, Para $\boxed{sen(a) = 0}$

$$arcsen0 = a \rightarrow \boxed{a = k\pi}$$

Ahora que conocemos el valor de a, debemos hallar el valor de b.
Así, para $\underline{a = k\pi}$, entonces

$$cos(a)senh(b) = cos(k\pi)senh(b) = (-1)^k senh(b) = 1 \rightarrow \boxed{senh(b) = (-1)^{-k}}$$

Donde, para $\underline{k \in \mathbb{Z} \text{ impar}}$

$$senh(b) = -1 \rightarrow \boxed{b = arcsenh(-1)}$$

Y para $\underline{k \in \mathbb{Z} \text{ par}}$

$$senh(b) = 1 \rightarrow \boxed{b = arcsenh(1)}$$

Así, tenemos que

Para k par

$$\boxed{w = a + bi = k\pi + iarcsenh(1)}$$

Para k impar

$$\boxed{w = a + bi = k\pi + iarcsenh(-1)}$$

(Solución) Finalmente, el sistema tiene infinitas soluciones de la forma.

Para k par

$$\boxed{(z, w) = \left(i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi), k\pi + iarcsenh(1)\right)}$$

Para k impar

$$\boxed{(z, w) = \left(i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi), k\pi + iarcsenh(-1)\right)}$$

Pregunta 3 (8 puntos) Sea $w = e^{2\pi i/3}$ la raíz cúbica primitiva de la unidad.

(a) Demostrar que la factorización clásica de variable real $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ se convierte en $a^3 - b^3 = (a-b)(a-bw)(a-bw^2)$ para $a, b \in \mathbb{C}$ (Sugerencia: completar cuadrados en el polinomio cuadrático y reconocer bw y bw^2 en esta factorización).

(b) Usar la factorización anterior para resolver

$$\lim_{z \to e^{2\pi i/3}} \frac{z^3 - 1}{z - e^{2\pi i/3}}$$

Solución

(a) Para resolver este ejercicio, lo que buscamos demostrar es que $(a^2+ab+b^2) = (a-bw)(a-bw^2)$

Sustituyendo, $w = e^{2\pi i/3}$ en la expresión de la izquierda tenemos que,

$$(a-bw)(a-bw^2) = (a-be^{2\pi i/3})(a-be^{4\pi i/3}) = a^2 - abe^{4\pi i/3} - abe^{2\pi i/3} + b^2 e^{2\pi i/3} e^{4\pi i/3} =$$
$$= a^2 - ab\left[e^{4\pi i/3} + e^{2\pi i/3}\right] + b^2 e^{\left(\frac{2\pi i}{3} + \frac{4\pi i}{3}\right)} = a^2 - ab\left[e^{4\pi i/3} + e^{2\pi i/3}\right] + b^2 e^{2\pi i}$$

Luego, la fórmula de euler establece que,

$$e^{i\theta} = cos(\theta) + isen(\theta)$$

Así, llegamos a la siguiente expresión

$$a^2 - ab\left[cos(4\pi/3) + isen(4\pi/3) + cos(2\pi/3) + isen(2\pi/3)\right] + b^2\left(cos(2\pi) + isen(2\pi)\right) =$$

$$a^2 - ab\left[(cos(4\pi/3) + cos(2\pi/3)) + i\left(sen(4\pi/3) + sen(2\pi/3)\right)\right] + b^2\left(1 + 0i\right) =$$

Luego, si trasladamos los ángulos al primer cuadrante (o si aplicamos propiedades de sumas de ángulos) y buscamos una expresión equivalente de senos y cosenos. Tenemos que,

$$sen(\frac{2\pi}{3}) = sen(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$cos(\frac{2\pi}{3}) = -cos(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$$
$$sen(\frac{4\pi}{3}) = -sen(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$cos(\frac{4\pi}{3}) = -cos(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, siguiendo con la expresión que veníamos desarrollando

$$a^2 - ab\left[\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] + b^2 =$$

$$a^2 - ab\left[(-1) + i0\right] + b^2 = \boxed{a^2 + ab + b^2}$$

De manera que queda demostrado

$$(a^2+ab+b^2) = (a-bw)(a-bw^2)$$

(b) Una vez demostrada la identidad, podemos resolver el siguiente límite

$$\lim_{z \to w} \frac{z^3 - 1}{z - w}$$

Sea el numerador $z^3 - 1$, podemos desarrollarlo de forma que

$$z^3 - 1 = z^3 - 1^3 = (z-1)(z - 1 \cdot w)(z - 1 \cdot w^2) = (z-1)(z-w)(z-w^2)$$

Simplemente utilizando la identidad que acabamos de demostrar.
Por lo tanto,

$$\lim_{z \to w} \frac{z^3 - 1}{z - w} = \lim_{z \to w} \frac{(z-1)(z-w)(z-w^2)}{z-w} = \lim_{z \to w} (z-1)(z-w^2) = (w-1)(w-w^2)$$

Tal que,

$$(w-1)(w-w^2) = (e^{2\pi i/3} - 1)(e^{2\pi i/3} - e^{4\pi i/3}) =$$

$$= (cos(2\pi/3) + isen(2\pi/3) - 1) \cdot (cos(2\pi/3) + isen(2\pi/3) - cos(4\pi/3) - isen(4\pi/3))$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(i\sqrt{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{2}$$

Finalmente,

$$\boxed{\lim_{z \to w} (z-1)(z-w^2) = \frac{-3}{2}\left(\sqrt{3}i + 1\right)}$$

Este material ha sido creado para gecousb.com.ve

Solución y digitalización

Pablo Garrido
Estudiante de Ing. Electrónica
16-11296

Revisión

Joandriz González
Estudiante de Ing. de Materiales
16-10456

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas a mi correo **garridop3@hotmail.com**